Algebra III - Abstraktna algebra, 29.11.2016.

1. (a) Dani sta množici $H_0 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a+b+c+d=0\}$ in $H_1 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a+b+c+d=1\}$. Preveri, ali množici H_0 in H_1 tvorita grupi glede na operacijo seštevanja matrik. Odgovore utemeljite!

(b) Naj bosta H in K končni podgrupi grupe G, ter da je $\gcd(|H|,|K|)$ praštevilo. Pokaži da je $H \cap K$ ciklična grupa.

Re.

(a) $H_0 : (a+a_1)+(b+b_1)+(c+c_1)+(d+d_1)=0$ je zaprta; je asociativna; identiteta je $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ je inverz za $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; H_1 je grupa.

H_1 ni grupa (ni zaprta), npr. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H_1$ ampak $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin H_1$.

(b) $H \cap K$ je podgrupa grupe G. Če je $k = |H \cap K|$ potem k deli $|H|$ in k deli $|K|$.
Če k deli $\gcd(|H|,|K|) \Rightarrow k=1$ ali k je praštevilo...

2. Naj bosta $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ in $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Napiši $\alpha\beta$ in $\beta^2\alpha$ kot produkt disjunktnih ciklov.

(b) Napiši $\alpha\beta$ in $\beta^2\alpha$ kot produkt 2-ciklov (torej kot produkt transpozicij).

(c) Določi α^{-1}, β^{-1} in $(\alpha\beta)^{456}$.

Re.
(a) $\alpha\beta = (364758)$, $\beta^2 = (178)(234)$, $\beta^2\alpha = (1376)(245)$.
(b) $\alpha\beta = (38)(35)(37)(34)(36)$, $\beta^2\alpha = (16)(17)(13)(25)(24)$.
(d) $\alpha^{-1} = (132)(45)(678)$, $\beta^{-1} = (128473)(56)$, $(\alpha\beta)^6 = \mathrm{id}$, $(\alpha\beta)^{456} = \mathrm{id}$.

3. (a) Določi vse homomorfizme iz grupe $\mathbb{Z}_4$ v grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(b) Poišči grupo permutacij, ki je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_4$. Napiši Cayleyevo tabelo za $\mathbb{Z}_4$ ter za dobljeno grupo permutacij.

Re.

(a) Homomorfizmi so

x	0	1	2	3
$\varphi_1(x)$	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
$\varphi_2(x)$	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,1)
$\varphi_3(x)$	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(1,0)
$\varphi_4(x)$	(0,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)

(b) $T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$...

4. Naj bo G dana grupa in naj bo $|G| = 8$. Pokaži, da mora G vsebovati element reda 2.

Re.

Uporabi Lagrange-ov izrek. Če je $a \in G$ potem $|a|$ deli $|G|$. Če je $|a| = 2$ potem... Če je $|a| = 4$ potem $a^2 \cdot a^2 = e$... Če je $|a| = 8$ potem $a^4 \cdot a^4 = e$...